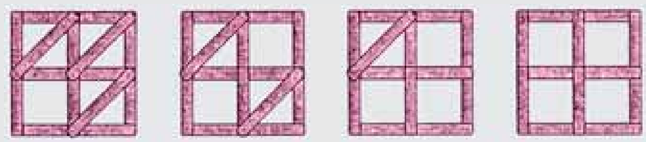
آیدین منظوری
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

اجسام صُلب و ویژگی‌های هندسی آن‌ها

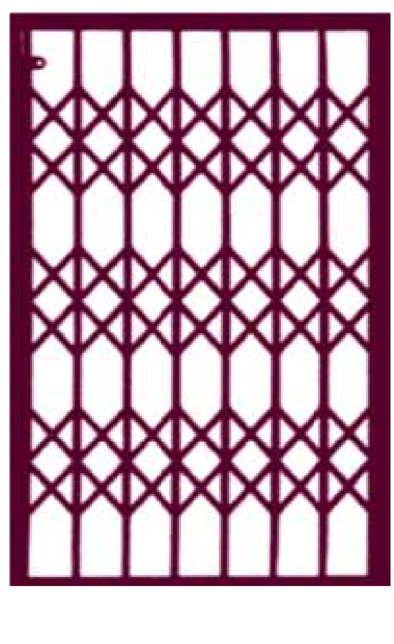
اشاره

یکی از پرسش‌های آزمون سی‌امین المپیاد ریاضی ایران، مرحلهٔ اول، به‌صورت زیر بود:
فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعهٔ چوبی به طول‌های یک متر و $\sqrt{2}$ متر، چهار شکل زیر را ساخته‌ایم، به‌طوری‌که قطعات می‌توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چندتا از این شکل‌ها می‌توانند با حرکت قطعه چوب‌ها تغییر شکل دهند؟ (سی‌امین المپیاد ریاضی دانش‌آموزی، مرحلهٔ اول، ۵ اسفند ۱۳۹۰، بخش سؤالات پنج‌گزینه‌ای، سؤال ۷.)*



الف) هیچکدام ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

شرح و پاسخ به این پرسش، انگیزهٔ نگارش مقالهٔ حاضر شد. ابتدا مختصری دربارهٔ اجسام صلب و ویژگی‌های آن‌ها توضیح می‌دهیم، سپس با توجه به نتایج به‌دست آمده، پاسخ این پرسش را می‌دهیم.



به بیان ساده، جسم صلب جسمی است که موقعیت ذرات تشکیل‌دهندهٔ آن نسبت به یکدیگر در شرایط متفاوت تقریباً ثابت بماند، و در نتیجه کل جسم همواره شکل ثابت و غیرقابل تغییری داشته باشد. اگر به اطراف خود نگاهی بیندازیم، می‌توانیم مثال‌های زیادی هم از اجسام صلب و هم از اجسام غیرصلب پیدا کنیم. مثلاً، قاشق و چنگال فولادی، در چوبی، پنجرهٔ شیشه‌ای، عصای چوبی و لیوان شیشه‌ای را می‌توانیم نمونه‌هایی از اجسام صلب بدانیم، زیرا سخت و محکم‌اند و همیشه شکل ثابت خود را حفظ می‌کنند. می‌دانید که اگر چنگال فلزی خود را در یک تکه از میوه فرو کنید، دندانه‌های آن خم نمی‌شوند، و این به‌خاطر صلب بودن چنگال است. اما در مقابل، نمونه‌های فراوانی هم از اجسام غیرصلب داریم، مانند پیراهنی که می‌پوشیم، کیسهٔ پلاستیک، یک تکه کاغذ، سیم برق، گوجه‌فرنگی، برگ درخت، آب موجود در یک لیوان، و یا حتی هوای اطراف ما! هیچ‌کدام از این اجسام شکل ثابتی ندارند، بلکه در اثر نیروهای وارده به آن‌ها تغییر شکل می‌دهند. برخی از آن‌ها مانند پارچه و کاغذ، جامداتی هستند که قابلیت انعطاف و تغییر شکل دارند، حال آنکه برخی دیگر از آن‌ها مثل آب و هوا اساساً جامد نیستند، بلکه «سیّال» هستند، و سیّالات نیز خود به دو دستهٔ مایعات و گازها تقسیم می‌شوند.

اکنون بگذارید دربارهٔ خواص اجسام صلب اندکی بیشتر صحبت کنیم. فرض کنید که چند جسم صلب، مثلاً تعدادی قطعهٔ چوبی مکعب مستطیل شکل با ضخامت یکسان و طول‌های متفاوت در اختیار داریم. ابتدا فرض کنید که تعدادی از این قطعات را به‌طور پراکنده روی زمین قرار داده باشیم. واضح است که در این حالت، حرکت هر کدام از قطعه‌ها مستقل از حرکت سایر قطعات است.

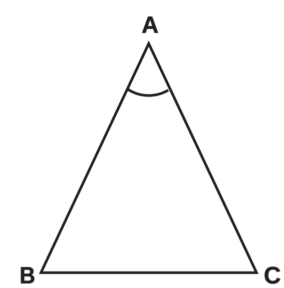
اما می‌توان این قطعه‌ها را به روش‌های گوناگون به یکدیگر متصل کرد. مثلاً یک روش این است که دوتا از آن‌ها را با چسب چوب و یا با کوبیدن دو میخ در دو نقطهٔ متفاوتشان، محکم به‌هم بچسبانیم، طوری که نتوانند نسبت به هم جابه‌جا شوند. در این صورت مجموعهٔ این دو قطعهٔ محکم چسبیده به یکدیگر، تشکیل یک جسم صلب مرکب جدید را خواهد داد.

در حالت سوم، فرض کنید که دو قطعهٔ یکسان را انتخاب کنیم، به نحوی که طول هر دو قطعه مساوی یک متر باشد، و سپس انتهای آن‌ها را به یکدیگر لولا کنیم، به نحوی

که ایـن دو قطعـه بتوانند آزادانـه دور لولا بچرخند (شکل ۱).

شکل ۱

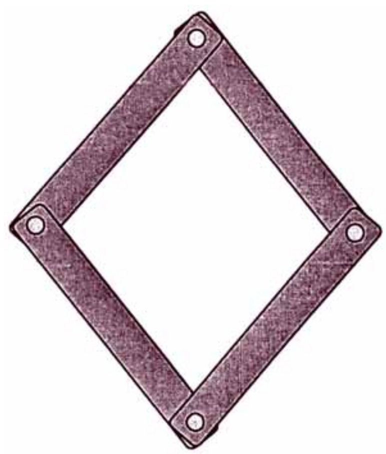
جسم مرکب حاصل، جسمی است که از ترکیب اجسام صلب کوچک‌تری تشکیل شده، اما خودش دارای مقداری آزادی برای تغییر شکل است. اگر نقطهٔ مرکز لولا را با حرف A و دو سر دیگر این قطعات را به‌ترتیب با حروف B و C نام‌گذاری کنیم، به یک مثلث متساوی‌الساقین به رأس A می‌رسیم که طول ساق‌های آن برابر با مقدار ثابت یک متر، و زاویهٔ A در آن متغیر است (شکل۲).



شکل ۲

مثلث ABC ثابت نیست، زیرا اگرچه AB=AC=۱m مقدارهای ثابتی هستند، ولی زاویهٔ $\hat{A}$ متغیر است، و در نتیجه طول ضلع BC و اندازهٔ زاویه‌های B و C نیز تغییر می‌کند. در واقع، واضح است که مکان هندسی رئوس B و C عبارت است از دایره‌ای به مرکز A و به شعاع یک متر. به‌عنوان یک تمرین ساده این موضوع را خودتان ثابت کنید. همچنین نشان دهید که طول قاعدهٔ BC از رابطهٔ $BC = ۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ به‌دست می‌آید و از آنجا داریم: $\hat{A} = ۲\mathrm{Arc}\sin\frac{BC}{۲}$. این بدان معناست که مقدار عددی هر کدام از $\hat{A}$ و BC از روی دیگری به‌طور یکتا تعیین می‌شود و در نتیجه، تناظری یک‌به‌یک میان آن دو وجود دارد. این موضوع را به‌خاطر بسپارید، زیرا در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

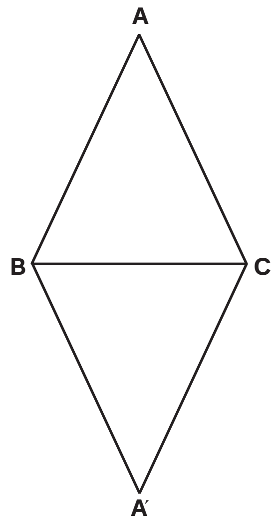
حالا فرض کنیم که چهار تا از قطعه‌های یک متری را طوری به‌هم لولا کرده‌ایم که یک چهارضلعی تشکیل داده‌اند (شکل۳).



شکل ۳

چهارضلعی حاصل یک لوزی با طول ضلع ثابت یک متر است، زیرا تمام اضلاع آن با هم برابرند؛ اما در حالت کلی زاویه‌ها و قطرهای آن تغییر می‌کنند. برای درک بهتر موضوع، این لوزی را به‌صورت همان مثلث ABC به همراه بازتاب آن نسبت به قاعدهٔ BC در نظر بگیرید (شکل ۴).

ابتدا دقت کنید که مثلث A´BC دقیقاً قرینهٔ مثلث ABC است، بنابراین A´BC کاملاً هماهنگ با تغییرات ABC تغییر



شکل ۴

می‌کند. پس برای مطالعهٔ تغییرات لوزی ABA´C کافی است که تغییرات مثلث ABC را پیگیری کنیم.

از طرف دیگر، چون تمام لولاها در لوزی ما می‌توانند آزادانه باز و بسته شوند، پس هیچ محدودیتی از قبل روی $\hat{A}$ گذاشته نشده است. به‌علاوه، چون هیچ مانع فیزیکی روی قطرهای لوزی قرار ندارد، پس قطرهای لوزی نیز از قبل محدود نشده‌اند. نتیجه آنکه هم زاویهٔ A و هم قطر BC در شکل ۳ مجاز به تغییر هستند. اما توجه داشته باشید که بر طبق روابط طولی که در بالا دیدیم، تغییرات این دو وابسته به یکدیگرند و تناظری یک‌به‌یک بین اندازه‌های $\hat{A}$ و BC وجود دارد؛ یعنی با تغییر کردن یکی، اندازهٔ دیگری به‌طور یکتا تعیین می‌شود. خلاصه آنکه در لوزی ABA´C با وجود آنکه طول اضلاع ثابت است، اما مقادیر زاویه‌ها و اندازه‌های قطرهای آن متغیرند، و بنابراین لوزی ما شکل ثابت و معینی ندارد.

شاید برایتان جالب باشد که بدانید، چنین سیستمی در زندگی روزمره کاربرد مهمی دارد. به احتمال زیاد تا به‌حال درهای فلزی آکاردئونی را دیده‌اید. از این درها به‌عنوان یک پوشش محافظ در جلوی در اصلی ساختمان‌ها استفاده می‌شود. آیا هیچ

دقت کرده‌اید که طرز کار این در چگونه است؟ این درهای آکاردئونی، در واقع از تعداد زیادی عناصر لوزی‌شکل، کاملاً مشابه با آنچه که ما در بالا بررسی کردیم، تشکیل شده‌اند که همگی به‌طور هماهنگ با هم جمع و باز می‌شوند. نکتهٔ کلیدی در مورد طرز کار این درها همان موردی است که ما نتیجه گرفتیم: اینکه این عناصر لوزی‌شکل با وجود آنکه طول ضلع ثابتی دارند (و در حقیقت از قطعات صلب تشکیل شده‌اند)، ولی اندازهٔ زوایا و اقطار ثابتی ندارند، و در نتیجه در آکاردئونی می‌تواند جمع و باز شود.

سرانجام، حالتی را در نظر بگیرید که بخواهیم با قراردادن یک قطعه چوب (به طول دلخواه) روی قطر BC، لوزی ABA′C را مقید کنیم تا نتواند آزادانه تغییر شکل دهد. اول ببینیم که طول قطعهٔ چوبی که قرار است روی قطر قرار دهیم، حداقل و حداکثر چه مقادیری می‌تواند داشته باشد. واضح است که حداقل این مقدار برابر صفر است، یعنی حالتی که دو رأس B و C روی هم منطبق شوند و مقدار زاویهٔ A برابر صفر شود. از سوی دیگر، حداکثر طول ممکن برای قطر عبارت است از مقدار ماکسیمم عبارت $BC = 2\sin\frac{\hat{A}}{2}$. این عبارت زمانی ماکسیمم می‌شود که مقدار سینوس برابر یک شود که متناظر است با زمانی که مقدار زاویهٔ $\hat{A}$ برابر 180° باشد، و از آنجا:

$$0 \le BC \le 2\times \sin\frac{\pi}{2} = 2m$$

دقت کنید که این مقدار ماکسیمم در حقیقت برابر است با مجموع اضلاع AB و AC؛ مطلبی که به سادگی از قضیهٔ حمار نتیجه می‌شود. در نتیجه، قطعهٔ چوبی که قرار است در محل قطر قرار داده شود، می‌تواند هر مقداری بین صفر تا دو متر داشته باشد.

تصور کنید که اندازهٔ آن را برابر با یک متر بگیریم. در این حالت هر دوی مثلث‌های ABC و A′BC به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد تبدیل می‌شوند، و خواهیم داشت:

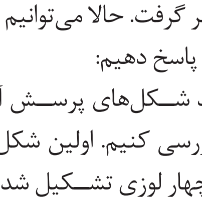
$$\hat{A} = \hat{A}' = 2\times \text{Arc}\sin\frac{1}{2} = 60^\circ$$

آیا می‌توانیم از قطعه‌ای به طول $\sqrt{2}$ متر استفاده کنیم؟ بله، زیرا داریم: $2 > \sqrt{2} > 0$. در این حالت مقدار زاویهٔ A برابر خواهد بود با:

$$\hat{A} = 2\times \text{Arc}\sin\frac{\sqrt{2}}{2} = 90^\circ$$

ضمناً، مقدار زاویهٔ A را به کمک قانون کسینوس‌ها در مثلث نیز می‌توانستیم محاسبه کنیم. در نتیجه، لوزی ABA′C به یک مربع به ضلع واحد تبدیل می‌شود. این مربع دیگر قابلیت تغییر شکل ندارد، زیرا قطر BC و به دنبال آن زوایای چهارضلعی و همچنین قطر AA′ همگی مقید شده و براساس اندازهٔ BC معین شده‌اند. این مربع را می‌توان مثال دیگری از جسم (مرکب) صلب در نظر گرفت. حالا می‌توانیم به پرسش مطرح شده پاسخ دهیم:

بیایید شکل‌های پرسش آزمون را یکی‌یکی بررسی کنیم. اولین شکل از سمت راست از چهار لوزی تشکیل شده است که در آن هیچ‌یک از زوایا یا اقطار مقید نشده‌اند. در نتیجه، هر چهار لوزی می‌توانند تغییر شکل دهند. (دقت کنید که اگرچه این شکل به‌صورت مربع رسم شده است، اما هیچ الزامی برای وجود زوایای قائمه در آن نیست و زاویه‌های آن آزادانه تغییر می‌کنند.) نکته‌ای که باید به آن دقت داشت، وضعیت لولای مرکزی است؛ یعنی همان نقطهٔ مرکزی‌شکل که فصل مشترک هر چهار لوزی کوچک نیز هست. اگر این نقطه را با حرف O، و زوایای آن را به‌ترتیب با $\hat{O}_1$، ...، $\hat{O}_4$ نام‌گذاری کنیم.



شکل ۵

داریم:

$$\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4 = 360^\circ \quad (*)$$

نتیجه می‌شود که تغییر زوایای این چهار لوزی، با تساوی فوق به یکدیگر وابسته است.

در شکل دوم روی یکی از لوزی‌ها یک قطعهٔ مقیدکنندهٔ قطر به طول $\sqrt{2}$ گذاشته شده و آن لوزی را واقعاً به یک مربع تبدیل کرده است. با همان نمادگذاری شکل اول، علاوه بر شرط (*) در اینجا یک شرط اضافی دیگر هم داریم، و آن هم عبارت است از اینکه $\hat{O}_1 = 90^\circ$ مقداری ثابت است. این مربع خودش تغییر شکل نمی‌دهد، اما لوزی‌های اطراف آن می‌توانند تغییر کنند. اگر زاویهٔ قائمه و تغییرناپذیر $\hat{O}_1$ را از تساوی (*) کم کنیم، شرط تغییر سایر زوایا به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4 = 270^\circ$$

وضعیت مشابهی نیز در مورد شکل سوم برقرار است، با این تفاوت که در اینجا دو مربع ثابت و دو لوزی متغیر داریم. در اینجا داریم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 90^\circ$ و در نتیجه:

$$\hat{O}_2+\hat{O}_4 = 180^\circ$$

اما وضعیت در شکل آخر متفاوت است. در این شکل سه مربع مقید و یک لوزی دیده می‌شود. یعنی داریم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = \hat{O}_4 = 90^\circ$. پس باید داشته باشیم:

$$\hat{O}_2 = 90^\circ$$

و این یعنی آنکه تمام لوزی‌های این شکل در واقع مربع‌های تغییرناپذیر هستند. پس شکل چهارم قابلیت تغییر ندارد و کاملاً صلب است.

بنابراین، می‌بینیم که گزینهٔ صحیح گزینهٔ (د) است، یعنی دقیقاً سه تا از این شکل‌ها می‌توانند تغییر شکل دهند.

پی‌نوشت

* سؤال و تصویر مربوط به آن‌را از: www.irysc.com برگرفته‌ایم.